62.03 Física II A / 62.04 Física II B / 82.02 Física II

Departamento de Física

.UBA fiuba
FACULTAD DE INGENIERÍA

LEY DE GAUSS

$$\boxed{\oiint \vec{E}(\vec{r})\,.\,d\vec{S} = \frac{Q_{enc}}{\varepsilon_0} \qquad\qquad \frac{\rho(\vec{r})}{\varepsilon_0} = \vec{\nabla}.\,(\vec{E})}$$

Módulo de E

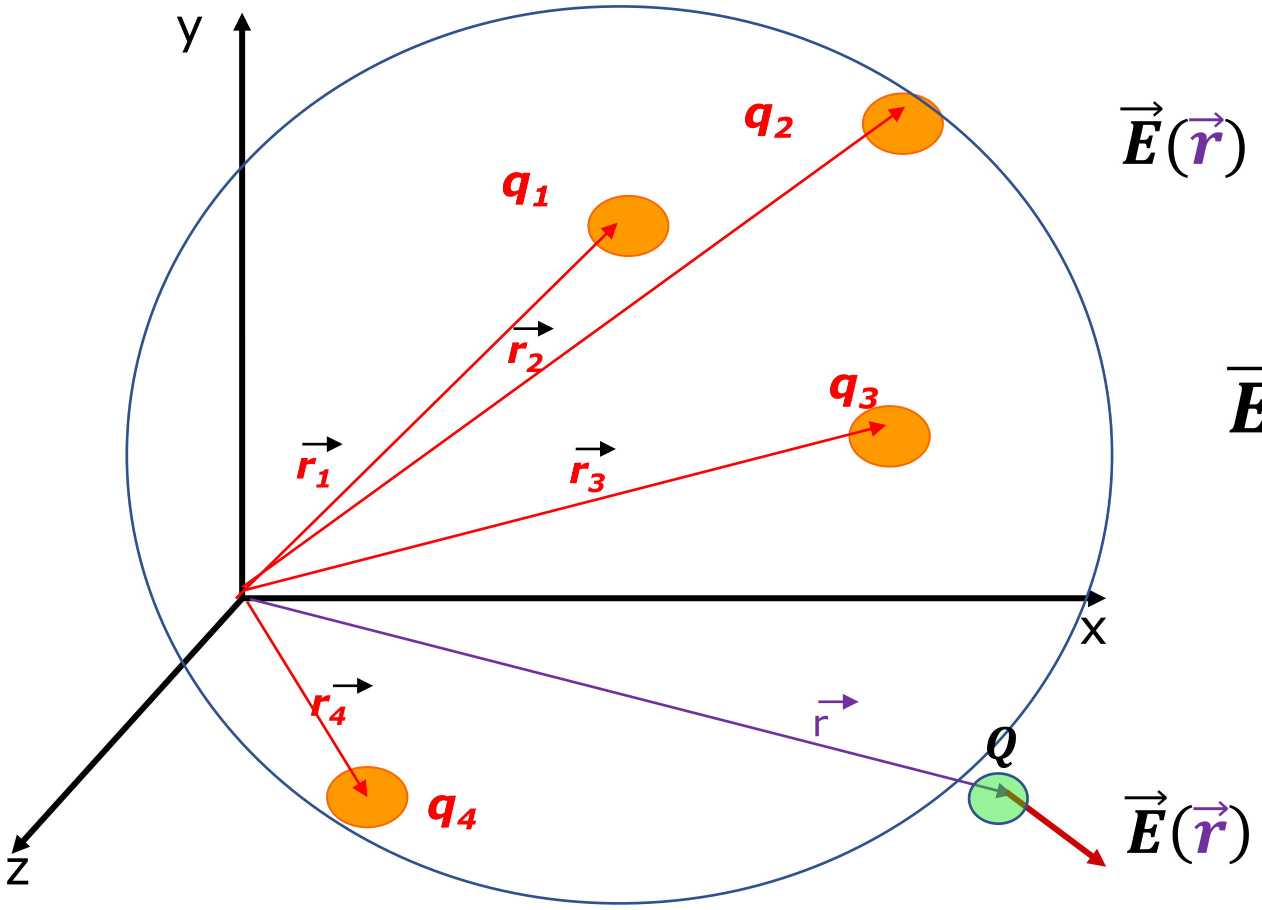
$$\oiint \vec{E}.\,d\vec{S} = \oiint E(\vec{r})\,\hat{r}\,.\,\hat{n}\,dS$$

-1≤numero ≤ 1

Si el módulo de E es constante sobre la sup. de integración

$$E(\vec{r}) \oiint \hat{r}.\hat{n}\,dS = \frac{Q_{enc}}{\varepsilon_0}$$

Campo Eléctrico debido a una conjunto de cargas



$$\vec{E}(\vec{r}) = \vec{E}_1(\vec{r}) + \vec{E}_2(\vec{r}) + \vec{E}_3(\vec{r}) + \vec{E}_4(\vec{r})$$

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sum_{i=1}^{n}\frac{q_i(\vec{r}-\vec{r}_i)}{|\vec{r}-\vec{r}_i|^3}$$

Campo Eléctrico depende de todas las cargas que conforman el sistema

Ley de Gauss es válida para cualquier distribución de cargas y para cualquier superficie cerrada de integración

¿Es una herramienta para calcular E ?

1) Sólo en aquellas distribuciones da carga que por simetría y construcción geométrica se puede determinar la dirección de E y su dependencia con las coordenadas.

2) Se puede elegir la superficie cerrada de Gauss óptima : donde el módulo de E es constante y se puede determinar el ángulo entre la normal a dicha sup y la dirección de E

$$\oiint \vec{E}(\vec{r})\,.\,d\vec{S} = \frac{Q_{enc}}{\varepsilon_0}$$

Ley de Gauss es válida para cualquier distribución de cargas y para cualquier superficie cerrada de integración.
El flujo de E depende de la carga encerrada por la superficie de gauss

Es una herramienta para calcular E ?

Ejemplo:
Hilo infinito con λ constante
Cilindro infinito
Plano infinito

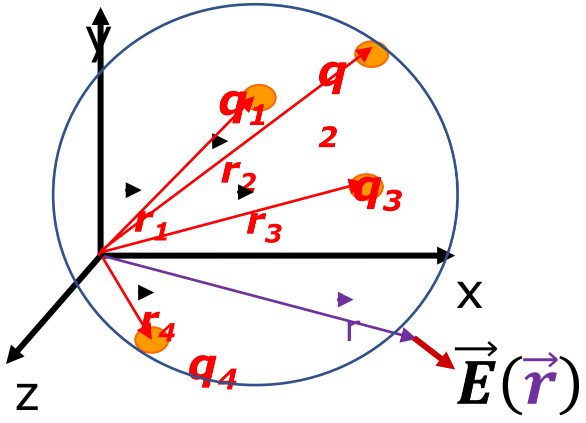
Esfera cargada en volumen (ρ =cte o que varie con r)

Esfera cargada en superficie (σ =cte o que varie con r)}
O cualquier otra distribución con simetría

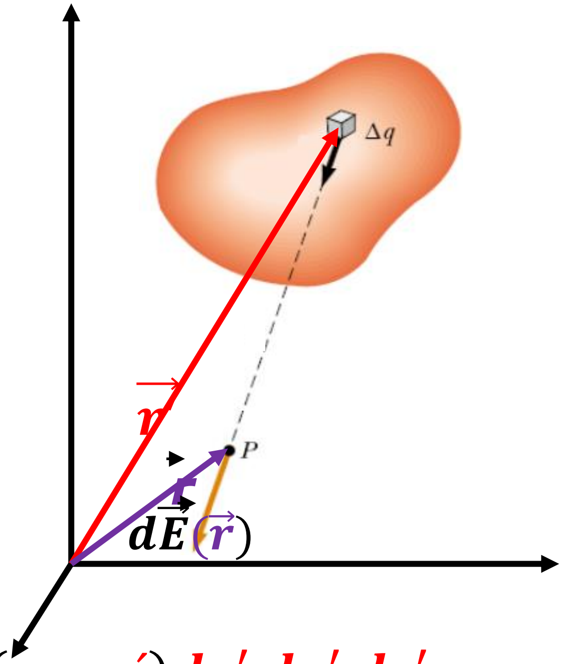
Repaso clase anterior

Campo Eléctrico

Para cargas puntuales en el vació en estado estacionario



$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int \frac{\rho(x',y',z').(\vec{r}-\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|^3}\,dx'dy'dz'$$



$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sum_{i=1}^{n}\frac{q_i(\vec{r}-\vec{r}_i)}{|\vec{r}-\vec{r}_i|^3}$$

$$E_x(x_0,y_0,y_0) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\iiint \frac{\rho(x',y',z')(x-x')dx'\,dy'\,dz'}{[(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2]^{3/2}}$$

$$E_y(x_0,y_0,y_0) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\iiint \frac{\rho(x',y',z')(y-y')dx'dy'dz'}{[(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2]^{3/2}}$$

$$E_z(x_0,y_0,y_0) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\iiint \frac{\rho(x',y',z')(z-z'\,)dx'\,dy'\,dz'}{[(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2]^{3/2}}$$

LEY DE GAUSS

$$\emptyset = \oiint \vec{E}(\vec{r})\,.\,d\vec{S} = \frac{Q_{enc}}{\varepsilon_0}$$

$$\frac{\rho(\vec{r})}{\varepsilon_0} = \mathrm{div}(\vec{E})$$

Ley de Gauss es válida para cualquier distribución de cargas y para cualquier superficie cerrada de integración.

Depende solamente de la carga encerrada en la superficie de Gauss elegida

$$\emptyset = \oiint \vec{E}(\vec{r}) \, . \, d\vec{S} = \frac{Q_{enc}}{\varepsilon_0}$$

¿Es una herramienta para calcular E ? Sí
¿Cuándo?

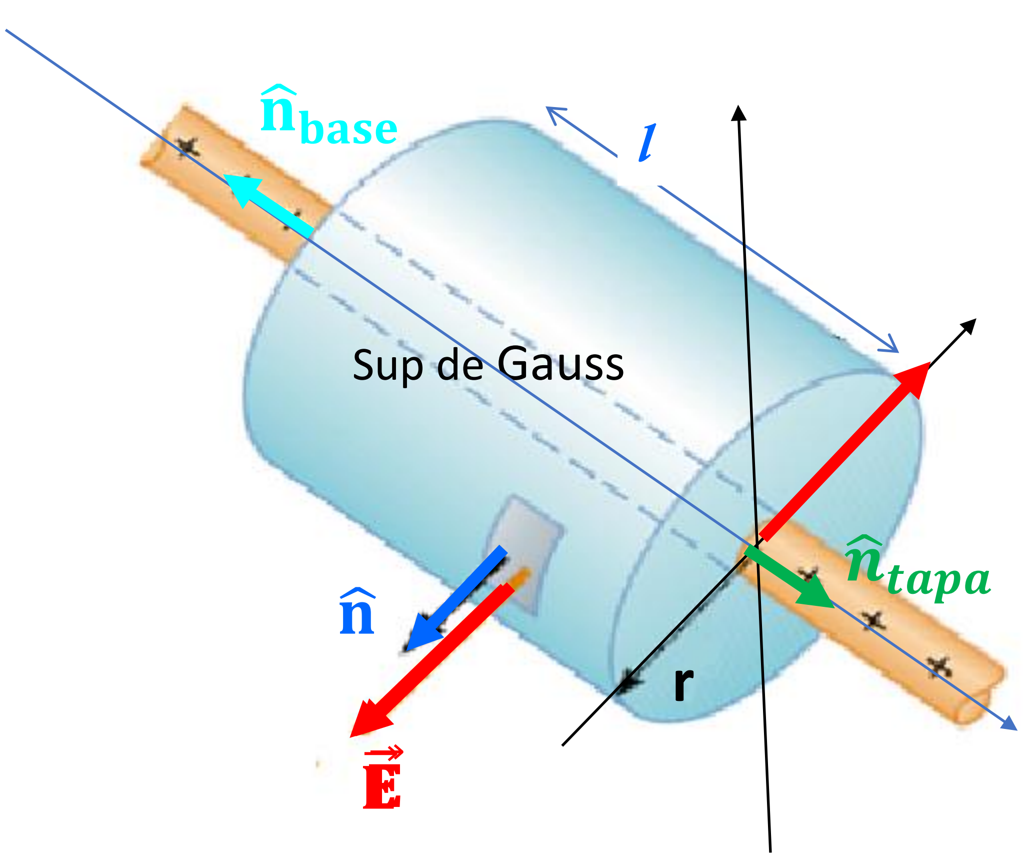
Campo Electrostático: Depende de todas las cargas que lo genera y de las coordenadas del punto donde se calcula el campo

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int \frac{\rho(x', y', z').(\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} \, dx'dy'dz'$$

Solo en aquellas distribuciones de carga que por simetría y construcción geométrica se puede determinar la dirección de E y su dependencia con las coordenadas: $\vec{E} = E(\vec{r})\,\hat{r}$.
Se elige la superficie cerrada de Gauss donde $\left|\vec{E}\right| =$ **constante y la dirección de E** $/\!/ \, \hat{n}$

1) La carga encerrada es toda la carga encerrada en la superficie de gauss
2) El resultado de E no puede depender del área de gauss elegida
3) Solo se determina el módulo del campo.
4) La dirección se obtuvo por simetría y construcción geométrica.

$$\oiint \vec{E}(r)\,.\,d\vec{S} = E(r)2\pi r\, l = \frac{Q_{enc}}{\varepsilon_0} = \int_0^{l} \lambda\ dz$$



$$E(r)2\pi r\, l = \frac{\lambda l}{\varepsilon_0} \qquad E(r) = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r}$$

Si el enunciado del problema dice un hilo de largo L= 10m con una carga total 10mC uniformemente distribuida

1) Determino λ Q= $\int_0^L \lambda\ dl$ $\lambda = \frac{Q}{L}$

$$E(r, lejos\ de\ los\ bordes) = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r} = \frac{Q}{L\, 2\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r}$$

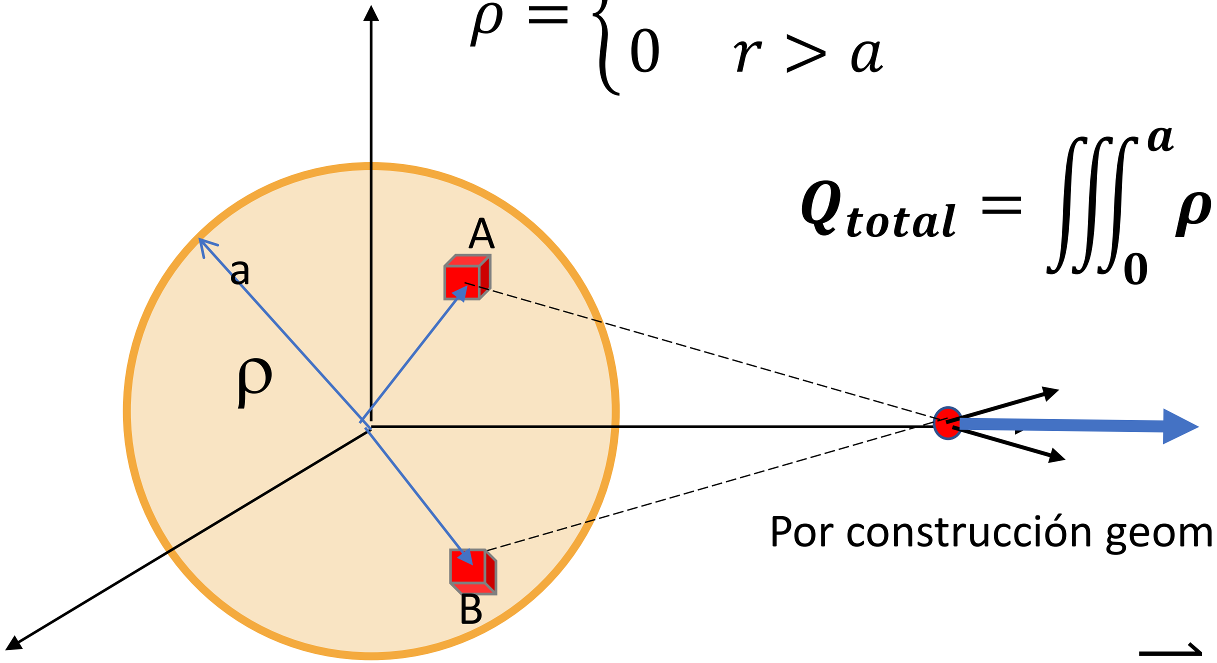
$$\vec{E}(r) = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r}\hat{r}$$

Primer ejemplo:

Una distribución volumétrica esférica con densidad volumétrica constante.

(Difícil de integrar)

$$\rho = \begin{cases} cte & r \leq a \\ 0 & r > a \end{cases}$$



$$\boldsymbol{Q_{total}} = \iiint_{0}^{a} \boldsymbol{\rho \, dVol}$$

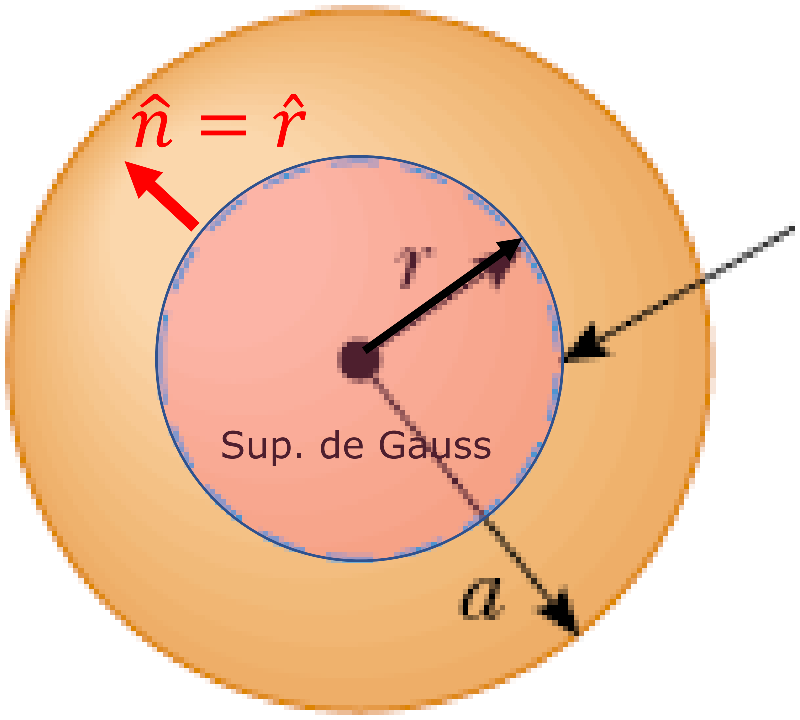
Por construcción geométrica

$$\boldsymbol{Q_{total}} = \boldsymbol{\rho} \iiint_{0}^{a} \boldsymbol{dVol} = \frac{\mathbf{4}}{\mathbf{3}} \boldsymbol{\pi r^3 \rho}$$

Por simetría

$$\vec{\boldsymbol{E}}(\vec{\boldsymbol{r}}) = \boldsymbol{E}(\vec{\boldsymbol{r}})\hat{\boldsymbol{r}} = \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}).\hat{\boldsymbol{r}}$$

$$\vec{dS} = ds\,\hat{n} = ds\,\hat{r}$$



$$\oiint \vec{E}(\vec{r})\cdot d\vec{S} = \frac{Q_{enc}}{\varepsilon_0}$$

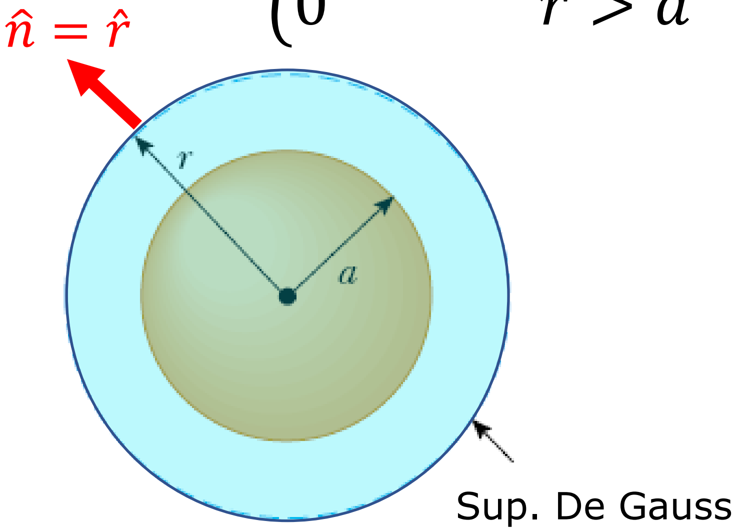
r es constate

$$\emptyset = \oiint \vec{E}(\vec{r})\cdot \vec{dS} = \oiint E(r)\hat{r}\cdot\hat{r}\,dS$$

$$\emptyset = E(r)\iint r^2 sen\theta\, d\theta\, d\varphi = E(r)\,4\pi\, r^2$$

$$\frac{Q_{enc}}{\varepsilon_0} = \frac{1}{\varepsilon_0}\iiint_0^r \rho\, dV = \frac{\rho}{\varepsilon_0}\frac{4}{3}\pi r^3$$

$$\boxed{E(r<a) = \frac{\rho\, r}{3\varepsilon_0}}$$



$$\rho = \begin{cases} cte = \rho & r \leq a \\ 0 & r > a \end{cases}$$

$$\emptyset = \oiint \vec{E}(\vec{r}) \, . \, d\vec{S} = \oiint E(r)\hat{r}.\hat{r} \, dS$$

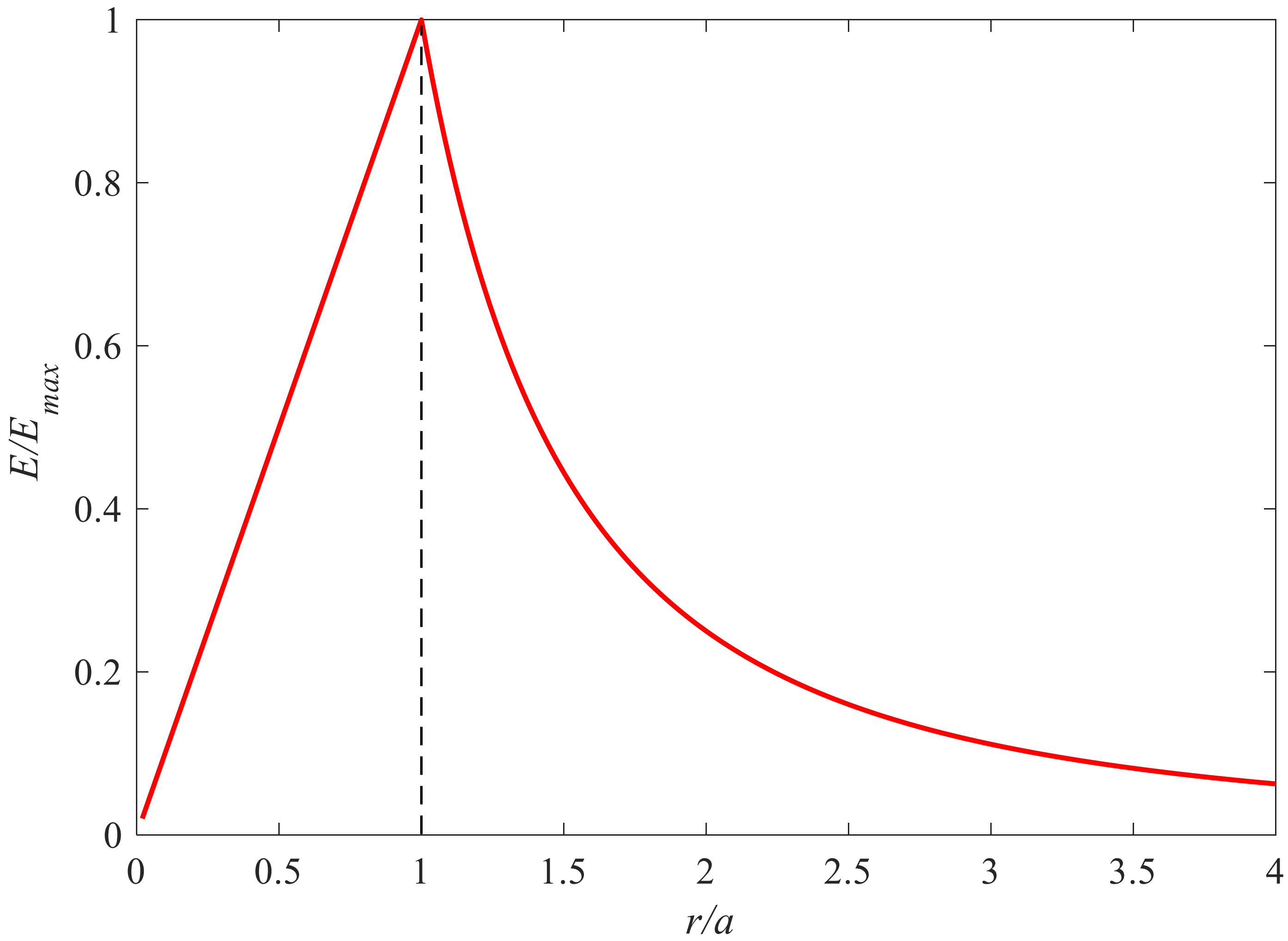
$$= E(r) \iint r^2 sen\theta \; d\theta \; d\varphi = E(r) \, 4\pi \; r^{\,2}$$

$$\frac{Q}{\varepsilon_0} = \frac{1}{\varepsilon_0} \int_0^r \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \rho \; dV = \frac{1}{\varepsilon_0} \int_0^a \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \rho \; dV = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \frac{4}{3} \pi a^3$$

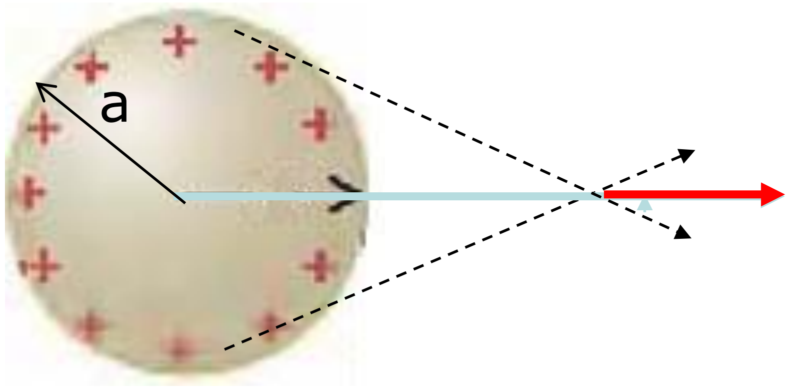
$$\int_0^r \rightarrow \int_0^a \rho + \int_a^r 0$$

$$\boxed{E(r > a) = \frac{\rho \; a^3}{3\varepsilon_0 r^2} = \frac{Q_{\text{Total}}}{4\pi\varepsilon_0 r^2}}$$

$$\overrightarrow{E(r)} = \begin{cases} \dfrac{\rho r}{3\varepsilon_0}\hat{r} & r \le a \\ \dfrac{\rho a^3}{3\varepsilon_0 r^2}\hat{r} & r \ge a \end{cases}$$



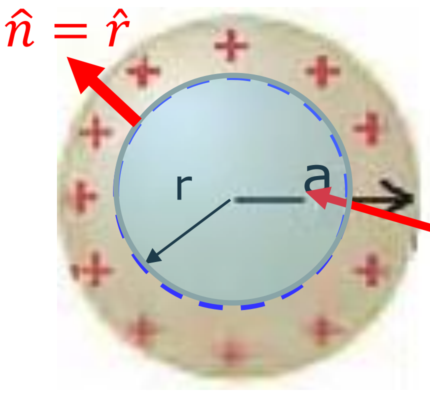
CAMPO ELECTRICO ESFERA UNIFORMEMENTE CARGADA EN SUPERFICIE



$$Q_{total} = \int \sigma dA = \sigma(4\pi a^2)$$

$$\oiint \vec{E}(\vec{r}) \, . \, d\vec{S} = \frac{Q_{enc}}{\varepsilon_0}$$

$$\vec{E} = E(\vec{r})\hat{r} \qquad E(r,\theta,\varphi) \longrightarrow E(r) \qquad \vec{E} = E(r)\hat{r}$$

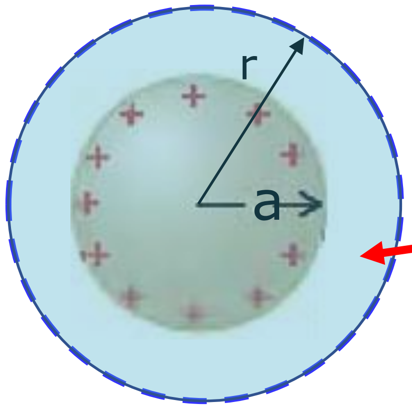


$$\emptyset = \oiint \vec{E}(\vec{r}) \, . \, d\vec{S} = \oiint E(r)\hat{r}.\hat{r}dS$$

$$= E(r) \iint r^2 sen\theta \, d\theta \, d\varphi = E(r) \, 4\pi \, r^{\,2}$$

$$\oiint \vec{E}(\vec{r}) \, . \, d\vec{S} = E(r) \, 4\pi r^2 = \frac{Q_{enc}}{\varepsilon_0} = 0$$

$$\boxed{E(r < a) = 0}$$

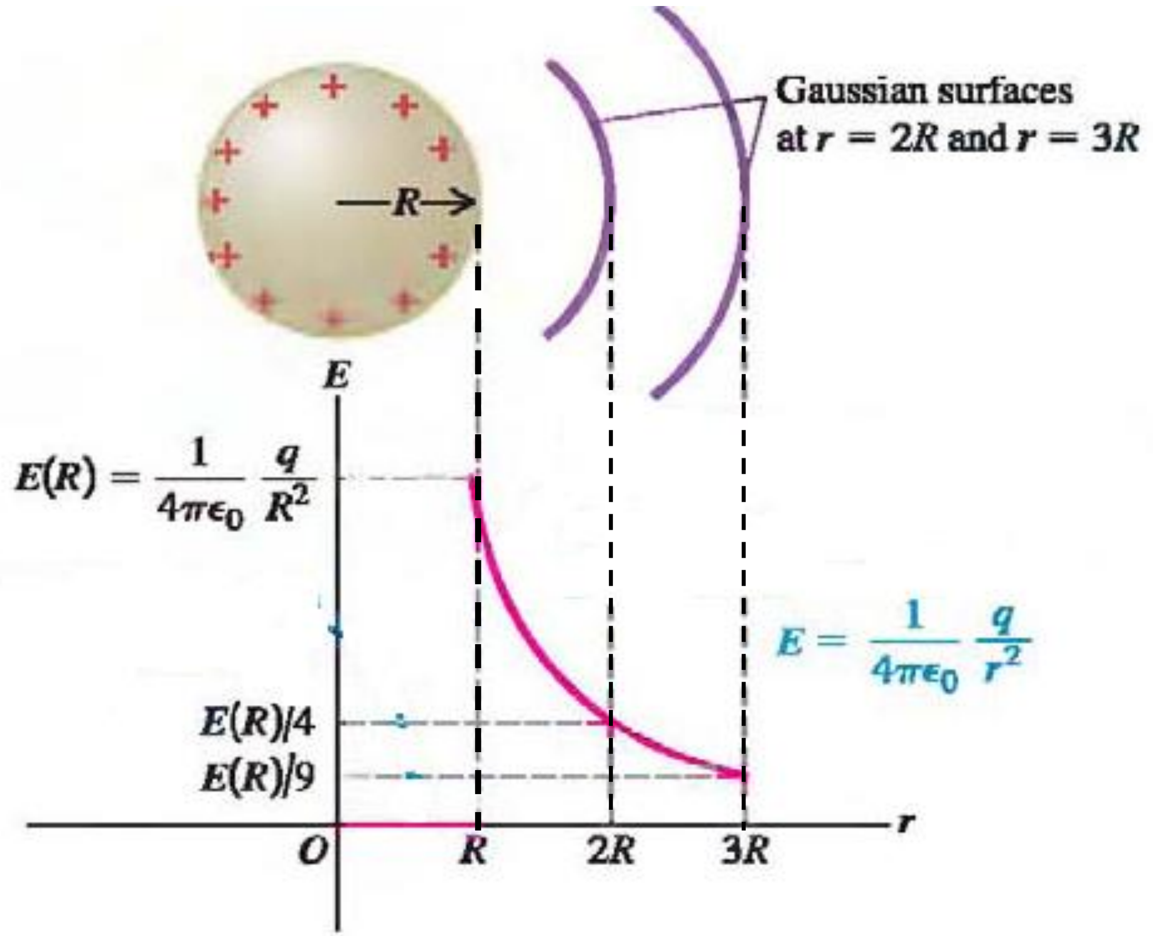


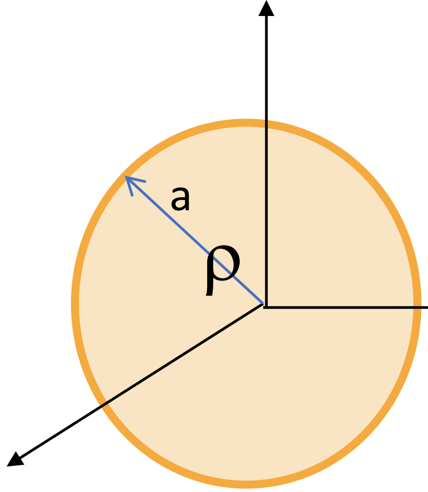
$$\oint\!\!\oint \vec{E}(\vec{r}) \,.\, d\vec{S} = E(r)\, 4\pi r^2 = \frac{Q_{enc}}{\varepsilon_0} = \frac{Q_{total}}{\varepsilon_0} = \frac{\sigma(4\pi a^2)}{\varepsilon_0}$$

$$\boxed{E(r > a) = \frac{\sigma a^2}{\varepsilon_0 r^2} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}}$$

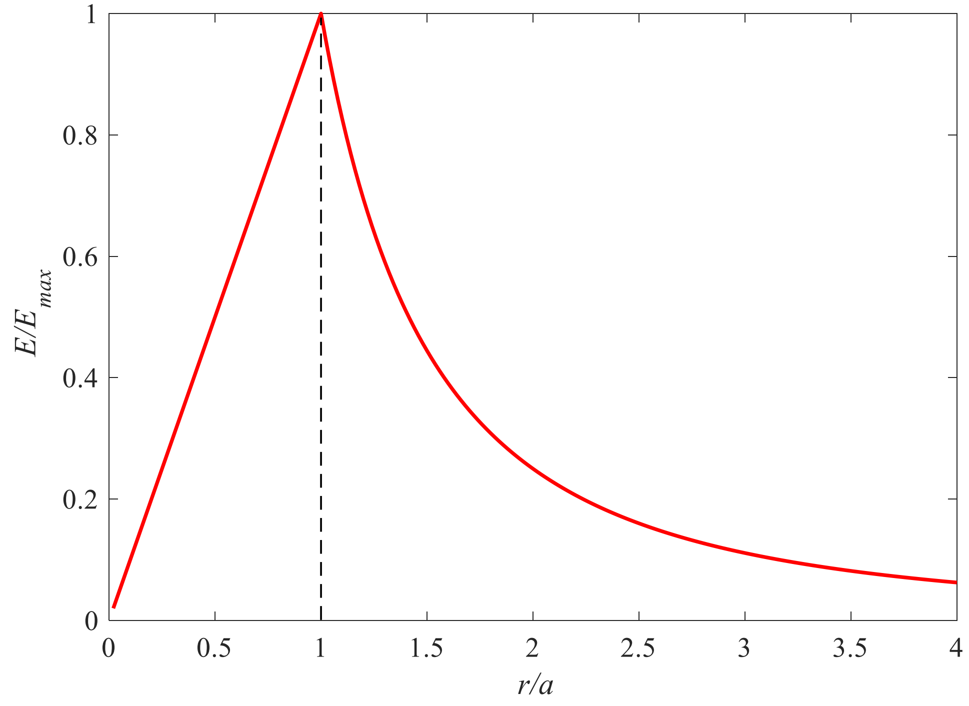
$$\boxed{\vec{E}\,(r > a) = \frac{\sigma a^2}{\varepsilon_0 r^2}\hat{r} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\,\hat{r}}$$

$$\overrightarrow{E(r)} = \begin{cases} 0\,\hat{r} & r < a \\ \dfrac{\sigma a^2}{\varepsilon_0 r^2}\hat{r} & r > a \end{cases}$$





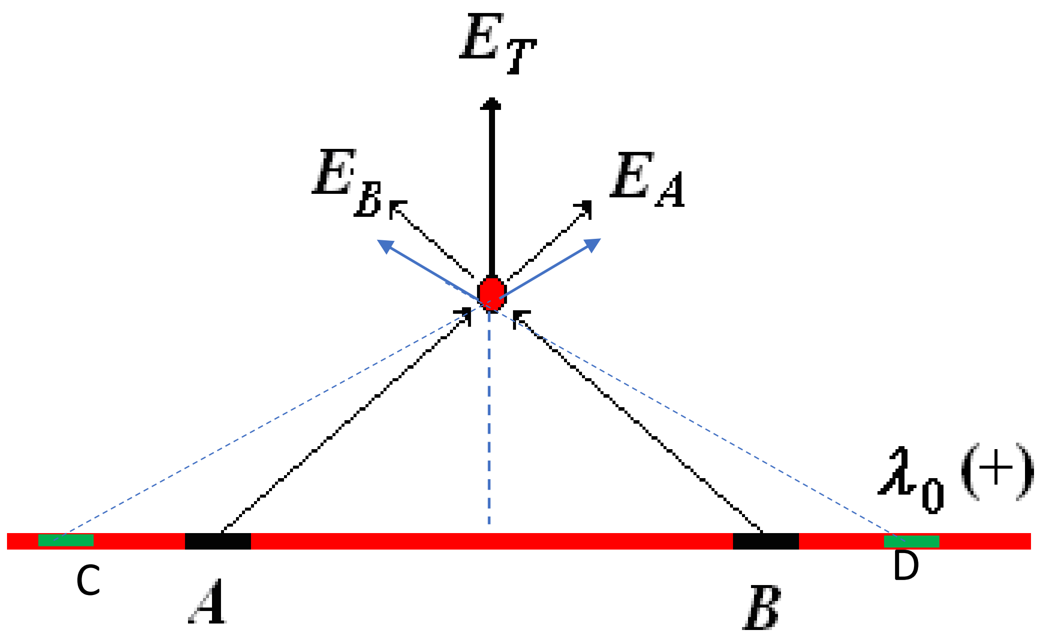
$$\overrightarrow{E(r)} = \begin{cases} \dfrac{\rho r}{3\varepsilon_0}\hat{r} & r \le a \\ \dfrac{\rho a^3}{3\varepsilon_0 r^2}\hat{r} & r \ge a \end{cases}$$



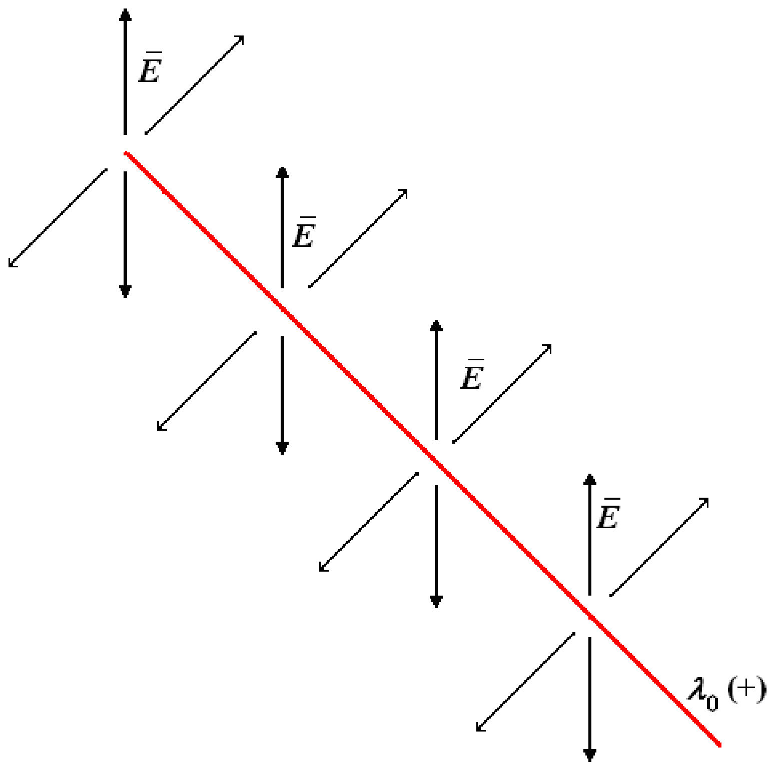
En esta situación el Teorema de Gauss nos simplificó mucho el trabajo. Con el estudio de la forma espacial de las líneas de campo y la elección de una “buena” superficie de Gauss Determinamos $\boldsymbol{E}$ en pocos pasos.

Tercer ejemplo:

Un hilo de largo infinito y con densidad lineal de carga uniforme



Vista lateral



Vista en perspectiva

$$\oiint \vec{E}(\vec{r})\,.\,d\vec{S} = \frac{Q_{enc}}{\varepsilon_0}$$

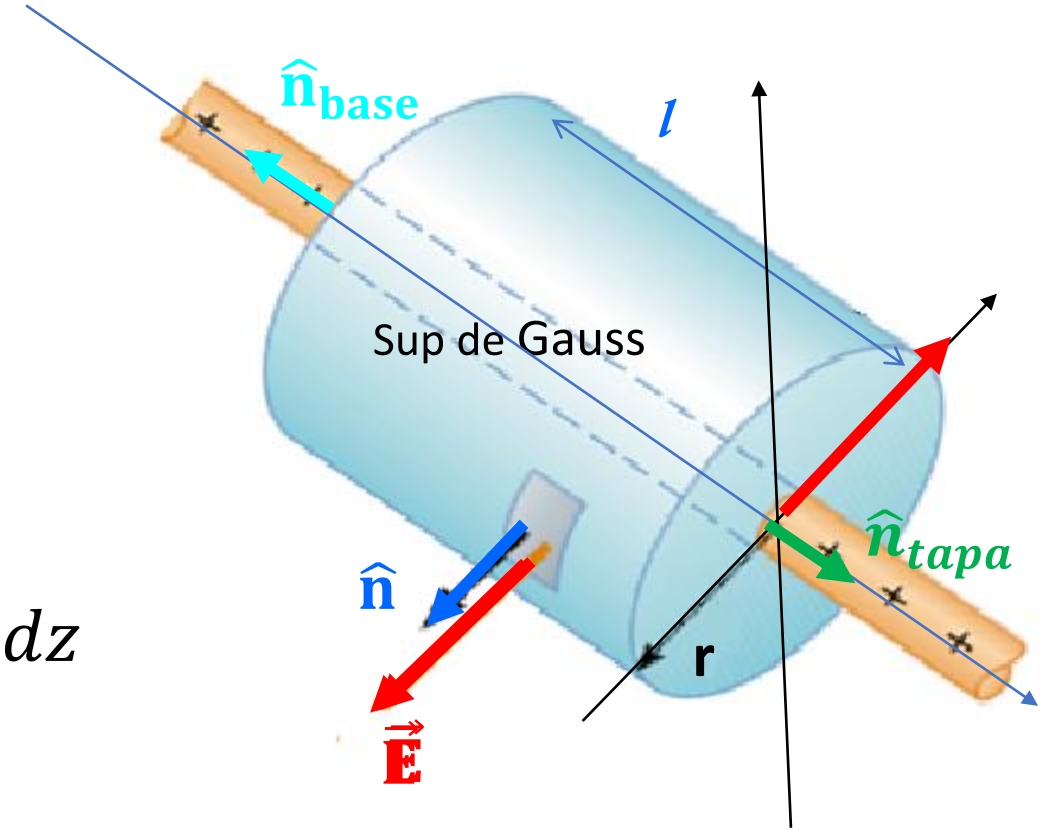
$$\vec{\boldsymbol{E}}.\,\boldsymbol{d\vec{S}} = \boldsymbol{E}\ \boldsymbol{dS}$$

$$\oiint \vec{E}(\vec{r})\,.\,d\vec{S} = \iint_{\boldsymbol{tapa}} \vec{E}(r).\,\boldsymbol{d\vec{S}} + \iint_{\boldsymbol{base}} \vec{E}(r).\,\boldsymbol{d\vec{S}} + \iint_{\boldsymbol{lateral}} \vec{E}(r).\,\boldsymbol{d\vec{S}}$$

$$\vec{E}_{\perp} d\vec{S} = 0$$

$$\oiint \vec{E}(r)\,.\,d\vec{S} = \iint_{Lateral} E(r)dS = E(r) \iint_{Lateral} dS$$

$$\oiint \vec{E}(r)\,.\,d\vec{S} = E(r)2\pi r\, l = \frac{Q_{enc}}{\varepsilon_0} = \frac{1}{\varepsilon_0}\int_0^l \lambda\ dz$$

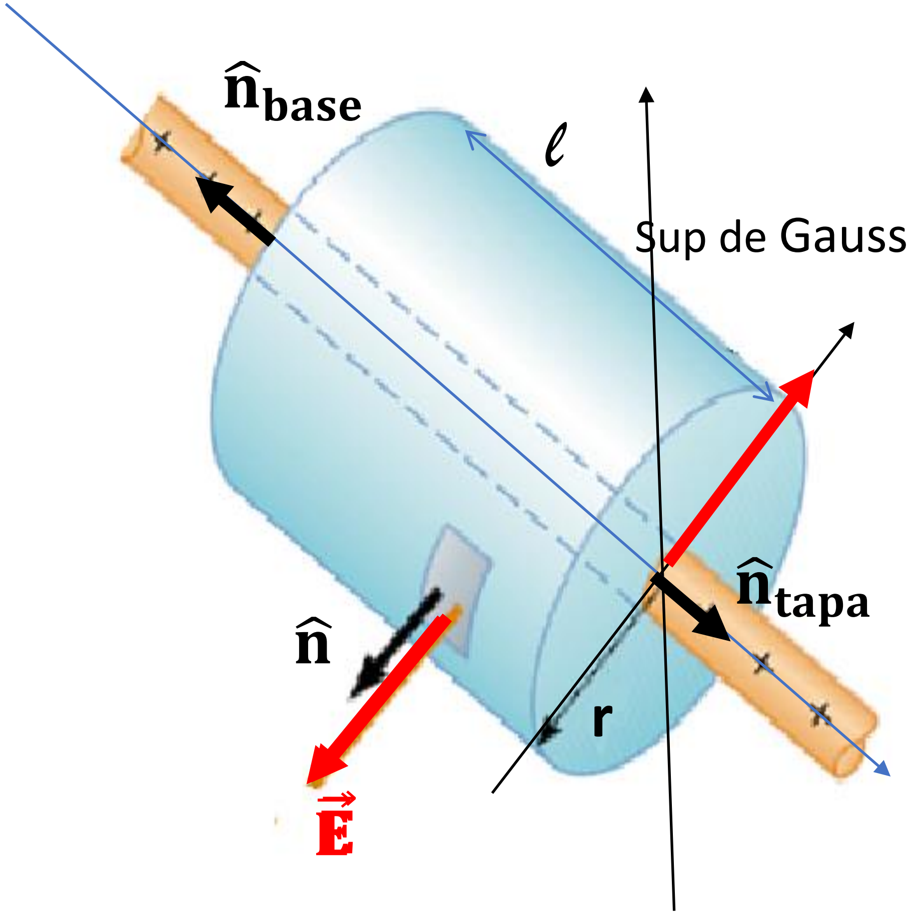


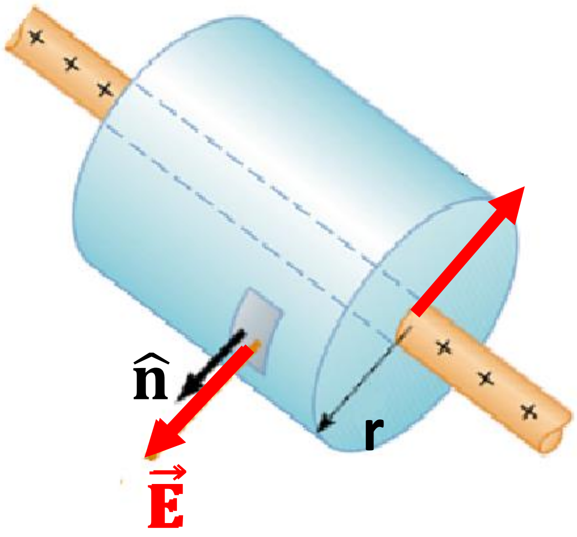
$$E(r)2\pi r\, l = \frac{\lambda l}{\varepsilon_0}$$

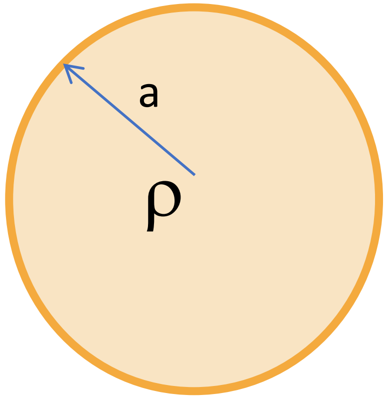
$$E(r) = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r}$$

Módulo de E

$$\vec{E}(r) = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r}\hat{r}$$







$$\vec{E}(r) = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r}\hat{r}$$

$$\vec{E}(r) = \begin{cases} \dfrac{\rho}{3\,\varepsilon_0}\, r\ \hat{r} & r \le a \\[2ex] \dfrac{\rho a^3}{3\varepsilon_0}\dfrac{1}{r^2}\,\hat{r} & r \ge a \end{cases}$$